

# 유한요소-전달강성계수법을 이용한 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석

## Static Analysis of Axisymmetric Shells with Various Shapes Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method

최명수\* · 양경욱\*\*  
Myung-Soo Choi\* and Kyong-Uk Yang\*\*

(Received 08 February 2023, Revision received 15 April 2023, Accepted 17 April 2023)

**초록 :** 축대칭 셸의 정적해석은 공학 분야에서 중요한 주제 중의 하나이다. 저자들은 유한요소법의 모델링 기법과 전달강성계수법의 전달 기법을 조합한 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석을 수행하기 위한 전산 알고리즘을 제안한다. 저자들은 유한요소-전달강성계수법으로 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석을 수행하기 위한 전산 알고리즘을 정식화한 후, 전산 프로그램을 개발하였다. 저자들은 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 3가지 계산모델(원형 돔, 물탱크, 압력용기)에 대하여 정적해석을 수행하였다. 양 방법의 계산 결과의 비교를 통해, 유한요소-전달강성계수법은 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석에 이용될 수 있는 신뢰성 있는 해석 기법임을 확인하였다.

**키워드 :** 정적해석, 축대칭 셸, 유한요소, 전달강성계수법

**Abstract :** Static analysis of axisymmetric shells is one of the important topics in engineering. The authors suggest a computational algorithm for carrying out the static analysis of axisymmetric shells with various shapes by using the finite element-transfer stiffness coefficient method (FE-TSCM) which combines both the modeling technique of the finite element method (FEM) and the transfer technique of the transfer stiffness coefficient method. In this study, the authors developed the computational program after computational algorithm was formulated by the FE-TSCM for the static analysis of the axisymmetric shell with various shapes. The authors carried out the static analysis about three computational models, which were a spherical shell cap, a water tank, and a pressure vessel by using the FE-TSCM and the FEM. From comparing the computational results of both methods, it was confirmed that the FE-TSCM is a reliable analysis method for static analysis of axisymmetric shells with various shapes.

**Key Words :** Static Analysis, Axisymmetric Shell, Finite Element, Transfer Stiffness Coefficient Method

\* 양경욱(<https://orcid.org/0000-0003-0416-8348>) : 교수,  
전남대학교 기관시스템공학과

E-mail : yangku@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7134

\*최명수(<https://orcid.org/0000-0003-0691-5570>) : 교수, 전남  
대학교 기관시스템공학과

\*\* Kyong-Uk Yang(<https://orcid.org/0000-0003-0416-8348>) :  
Professor, Department of Power System Engineering, Chonnam  
National University.

E-mail : yangku@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7134

\*Myung-Soo Choi(<https://orcid.org/0000-0003-0691-5570>) :  
Professor, Department of Power System Engineering, Chonnam  
National University.

— 기 호 설 명 —

하첨자

- $k_x, k_y$  :  $x$ 축 및  $y$ 축방향 스프링의 스프링상수
- $k_\theta$  : 회전방향 스프링의 스프링상수
- $l$  : 원추요소의 자오선방향 길이
- $p_x, p_y$  :  $x$ 축 및  $y$ 축방향의 압력
- $q_x, q_y$  :  $x$ 축 및  $y$ 축방향의 집중 절점하중
- $q_\theta$  : 절점에 작용하는 모멘트 하중
- $r$  : 원추요소 내부의 반경
- $R$  : 절점의 반경
- $t$  : 원추요소의 두께
- $u, w$  :  $x$ 축 및  $y$ 축방향의 변위
- $\mathbf{d}$  : 절점의 변위벡터( $3 \times 1$ ) =  $[u, w, \theta]^T$
- $\bar{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{e}}$  : 절점 좌측과 우측의 힘보정벡터( $3 \times 1$ )
- $\bar{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}}$  : 절점 좌측과 우측의 힘벡터( $3 \times 1$ )
- $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  : 원추요소 좌측 및 우측 절점에 부여되는 압력의 등가절점 하중벡터( $3 \times 1$ )
- $\mathbf{q}$  : 절점의 하중벡터( $3 \times 1$ ) =  $[q_x, q_y, q_\theta]^T$
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  : 요소강성행렬의 부분행렬( $3 \times 3$ )
- $\mathbf{H}$  : 기초지지 강성행렬( $3 \times 3$ )
- $\mathbf{K}$  : 원추요소의 강성행렬( $6 \times 6$ )
- $\mathbf{R}$  : 좌표변환행렬( $3 \times 3$ )
- $\bar{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{S}}$  : 절점 좌측, 우측의 강성계수행렬( $3 \times 3$ )

- $i$  : 절점 번호
- $(i)$  : 요소 번호

1. 서 론

두께가 얇고 굽은 판인 셸(shell)로 구성된 구조물은 가벼우면서 튼튼하여 기계, 항공, 해양, 토목, 원자력 등 다양한 산업분야에서 널리 사용되고 있어 공학적으로 중요한 구조물 중 하나이다. 셸 구조물의 설계에서 가장 기본이 되는 것이 하중에 대한 셸 구조물의 변위나 응력을 계산하는 정적해석(static analysis)이다.<sup>1,2)</sup>

셸 구조물의 정적해석을 수행하기 위해서는 모델링 과정이 선행되어야 하는데, 여기에 솔리드 요소, 셸 요소, 축대칭 요소 등이 사용될 수 있다.<sup>3-6)</sup> 솔리드 요소는 3차원 캐드 소프트웨어로 만든 형상에 사용자가 쉽게 적용할 수는 있지만 계산결과와 신뢰성을 확보하기 위해서는 엄청나게 많은 요소로 모델링해야 하므로 계산 시간이나 컴퓨터 메모리 측면에서 취약점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 셸 요소를 사용하면 해석에 필요한 전체 자유도 수를 크게 줄일 수 있다. 그러나 셸 구조물이 축대칭 형상과 하중을 갖는 경우에는 축대칭 요소를 사용하는 것이 자유도를 대폭 줄일 수 있어 아주 효과적이다.

저자들은 축대칭 셸 구조물의 정적해석 알고리즘의 개발을 위해 오랜 기간 동안 연구를 해왔고, 그 결과 단순한 원통형 셸과 원추형 셸의 정적해석을 위한 전산 알고리즘과 프로그램을 개발하여 제안한 바 있다.<sup>7,8)</sup> 그러나 과거의 연구는 특정 원통형 셸과 원추형 셸에만 적용이 제한되어 원형 돔, 구형 셸, 반구형 셸, 원통-원추-반구형 조합 셸 등 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸 구조물에는 적용이 불가능하였다. 따라서 이 연구의 목적은 단순한 원통형 또는 원추형 셸과 같은 직선형 셸뿐만 아니라 원형 돔, 반구형 셸과 같은 곡선형 셸을 포함한 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석을 수행할 수 있는 전산 알고리즘 및 프로그램을 개발하는 것이다.

그리스 문자

- $\alpha$  : 원추요소의 반경각
- $\beta$  : 인접 원추요소 사이의 경사각
- $\theta$  : 각변위
- $\xi$  : 요소의 정규화 좌표 (=  $x/l$ )

상첨자

- $i, j$  : 국부좌표계 번호
- $T$  : 전치행렬
- $O$  : 전체좌표계
- 1 : 역행렬

## 2. 정적해석 알고리즘

### 2.1 모델링

이 연구에서는 Fig. 1과 같은 원통, 원추, 반구형 셀이 조립된 축대칭 셀 구조물을 Fig. 2와 같은 절두 원추요소(truncated cone element)의 직렬 결합으로 고려한다. Fig. 1과 같이 축대칭 셀 구조물 전체를  $n$ 개의 절두 원추요소로 분할할 경우, 원추요소의 좌우측에는 분할 원이 존재하는데, 이 원을 링 절점(ring node) 혹은 간략히 절점(node)이라 하고, 좌단에서 우단으로 총  $n+1$ 개의 절점을 순차적으로 절점 1, 절점 2, ..., 절점  $n+1$ 로 부른다. 각 절점은 원추요소의 자오선( $x^i$ 축)방향과 이에 수직인 법선( $y^i$ 축)방향 그리고 회전( $\theta$ )방향의 3 자유도를 갖는다. 한편, 원추요소는 셀의 자오선 방향으로 직선이므로 곡선 셀을 모델링할 경우 분할수를 증가할수록 해석 결과가 정확해진다.

구조물이 탄성지지 된 경우, 기초와 절점 사이

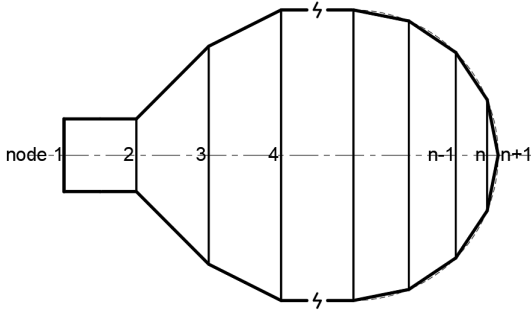


Fig. 1 Axisymmetric shell structure

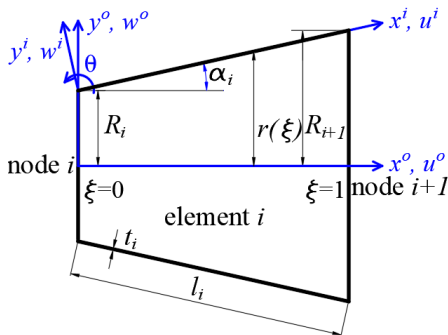


Fig. 2 Truncated cone element

에 3개의 기초지지 스프링을 삽입하고, 스프링상수 값을 통해 모델링한다. 구조물 좌우단의 경계 조건은 절점 1과 절점  $n+1$ 의 기초지지 스프링을 통해 모델링한다. 절점에는 하중 또는 모멘트가 직접 작용할 수 있고, 원추요소에 작용하는 압력을 통해 외력을 정의할 수 있다.

유한요소해석을 통해 Fig. 2와 같은  $i$ 번째 축대칭 절두 원추요소의 강성행렬은

$$\mathbf{K}_{(i)}^i = 2\pi l_i \int [\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2]^T \mathbf{J}_i [\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2] r d\xi \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(i)}^i & \mathbf{B}_{(i)}^i \\ \mathbf{C}_{(i)}^i & \mathbf{D}_{(i)}^i \end{bmatrix}$$

와 같고,  $i$ 번째 원추요소에 작용하는 압력의 등가 절점하중은 다음 식과 같다(부록 참고).<sup>3)</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{(i)}^i \\ \mathbf{r}_{(i)}^i \end{bmatrix} = 2\pi l_i \int [\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2]^T [p_x \ p_y]^T r d\xi \quad (2)$$

### 2.2 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달

절점  $i$ 의 좌측과 우측에서 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 식 (3)과 (4)로 각각 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i^j = \bar{\mathbf{S}}_i^j \mathbf{d}_i^j + \bar{\mathbf{e}}_i^j \quad (j = i-1, i) \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_i^j = \tilde{\mathbf{S}}_i^j \mathbf{d}_i^j + \tilde{\mathbf{e}}_i^j \quad (j = i-1, i) \quad (4)$$

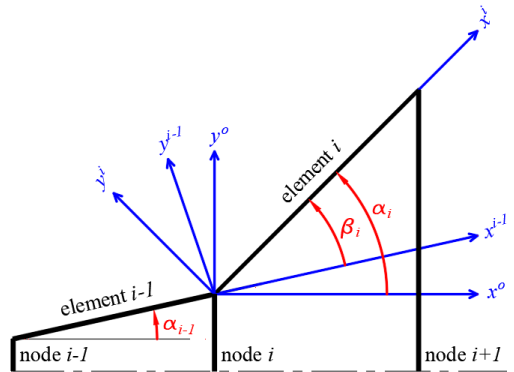


Fig. 3 Coordinate system

Fig. 3처럼 원추요소  $i$ 가 원추요소  $i-1$ 보다  $\beta_i$ 만큼 반시계 방향으로 기울어져 있으면

$$\mathbf{d}_i^i = \mathbf{R}(\beta_i) \mathbf{d}_i^{i-1}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_i^i = \mathbf{R}(\beta_i) \tilde{\mathbf{f}}_i^{i-1} \quad (5)$$

가 되고, 여기서 좌표변환행렬

$$\mathbf{R}(\beta_i) = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i & 0 \\ -\sin \beta_i & \cos \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

이고, 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$[\mathbf{R}(\beta_i)]^{-1} = [\mathbf{R}(\beta_i)]^T = \mathbf{R}(-\beta_i) \quad (7)$$

식 (4), (5), (7)로부터 다음 식과 같은 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 좌표 변환식을 유도할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{S}}_i^i = \mathbf{R}(\beta_i) \tilde{\mathbf{S}}_i^{i-1} [\mathbf{R}(\beta_i)]^T, \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i^i = \mathbf{R}(\beta_i) \tilde{\mathbf{e}}_i^{i-1}$$

기초지지 스프링을 갖는 절점  $i$ 에 집중하중이나 압력에 의한 등가집중하중이 작용할 경우, 절점  $i$ 에서 힘의 평형식은

$$\tilde{\mathbf{f}}_i^i + \mathbf{H}_i^i \mathbf{d}_i^i = \tilde{\mathbf{f}}_i^i + \mathbf{p}_i^i + \mathbf{q}_i^i + \mathbf{r}_{(i-1)}^i \quad (9)$$

가 되고, 여기서

$$\mathbf{r}_{(i-1)}^i = \mathbf{R}(\beta_i) \mathbf{r}_{(i-1)}^{i-1}, \quad \mathbf{H}_i^i = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{H}_i^o, \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_i^o = \begin{bmatrix} (k_x)_i^o & 0 & 0 \\ 0 & (k_y)_i^o & 0 \\ 0 & 0 & (k_\theta)_i^o \end{bmatrix}$$

식 (3), (4), (9)로부터 절점  $i$  좌우측의 강성계수행렬 및 힘보정벡터 사이의 관계(포인트 전달식)를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{S}}_i^i = \tilde{\mathbf{S}}_i^i + \mathbf{H}_i^i, \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i^i = \tilde{\mathbf{e}}_i^i - (\mathbf{p}_i^i + \mathbf{q}_i^i + \mathbf{r}_{(i-1)}^i)$$

일반적으로 유한요소법에서 사용하는 힘벡터의 정방향과 전달강성계수법에서 사용하는 힘벡터의 정방향이 다르므로, 식 (1)을 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_i^i \\ \tilde{\mathbf{f}}_{i+1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{(i)}^i & -\mathbf{B}_{(i)}^i \\ \mathbf{C}_{(i)}^i & \mathbf{D}_{(i)}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i^i \\ \mathbf{d}_{i+1}^i \end{bmatrix} \quad (12)$$

식 (3), (4), (12)로부터 원추요소  $i$  좌우측의 강성계수행렬 및 힘보정벡터 사이의 관계(필드 전달식)를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{S}}_{i+1}^i = \mathbf{D}_{(i)}^i + \mathbf{C}_{(i)}^i \mathbf{V}_i, \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}^i = -\mathbf{C}_{(i)}^i (\mathbf{G}_i^i)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_i^i$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = -(\mathbf{G}_i^i)^{-1} \mathbf{B}_{(i)}^i, \quad \mathbf{G}_i^i = \tilde{\mathbf{S}}_i^i + \mathbf{A}_{(i)}^i \quad (14)$$

### 2.3 절점 변위 및 힘벡터 계산

구조물의 좌단에 해당하는 절점 1에는 기초지지 스프링이 존재할 수 있으나 절점 1의 좌측에 원추 요소는 존재하지 않는다. 따라서

$$\tilde{\mathbf{S}}_1^1 = \mathbf{H}_1^1, \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1^1 = -(\mathbf{q}_1^1 + \mathbf{p}_{(1)}^1)$$

을 구하고, 필드 전달식인 식 (13)으로부터  $\tilde{\mathbf{S}}_2^1$ 와  $\tilde{\mathbf{e}}_2^1$ 를 구하고, 좌표 변환식인 식 (8)로부터  $\tilde{\mathbf{S}}_2^2$ 와  $\tilde{\mathbf{e}}_2^2$ 를 구한다. 그리고 포인트 전달식인 식 (11)로부터  $\tilde{\mathbf{S}}_2^2$ 와  $\tilde{\mathbf{e}}_2^2$ 를 구할 수 있다. 반복적으로 상기 좌표 변환식과 포인트 전달식 그리고 필드 전달식을 적용하면 최종적으로 마지막 절점인 절점  $n+1$  우측의  $\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^n$ 와  $\tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^n$ 도 유도할 수 있다.

우단의 경계조건도 스프링으로 모델링하였으므로 마지막 절점인 절점  $n+1$ 의 우측은 자유단으로 고려할 수 있고, 그 결과  $\tilde{\mathbf{f}}_{n+1}^n$ 은 영벡터가 된다. 따라서 식 (4)로부터

$$\mathbf{d}_{n+1}^n = -(\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^n)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^n \quad (16)$$

가 된다. 식 (3), (4), (12)로부터 식 (17)을 유도할 수 있는데, 이 식은 원추요소 좌우측의 변위벡터 사이의 관계식이다.

$$\mathbf{d}_i^i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1}^i - (\mathbf{G}_i)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_i^i \quad (i = n, n-1, \dots, 1) \quad (17)$$

따라서 식 (16)으로 마지막 절점의 변위벡터를 구한 후, 식 (17)과 식 (5)를 반복적으로 적용하면 모든 절점의 변위벡터를 구할 수 있다. 절점 좌우측의 힘벡터는 절점의 변위벡터를 이용하여 식 (3), (4)로부터 구할 수 있다.

### 3. 해석 결과

#### 3.1 균일한 분포하중을 받는 원형 돔

Fig. 4에 나타난 첫 번째 계산모델은 중심각이  $70^\circ$ 인 원형 돔(dome)이고, 상부에 균일한 분포하중을 받고 있으며 경계조건은 고정이다. 돔의 반경은 2.286 m, 두께는 7.62 cm, 탄성계수는 20.68 GPa, 푸아송비는 1/6, 분포하중은 6.894 kPa이다.

계산모델은 돔의 중앙부를 기준으로 좌우 대칭이므로 10개의 축대칭 원추요소로 모델링하였고, 돔의 중앙부를 절점 1, 고정점을 절점 11로 한다. 계산모델의 대칭성을 고려하여 절점 1의 변위  $w_1^o$ 와 각변위  $\theta_1$ 을 추가로 구속하여 계산하였다.

유한요소-전달강성계수법으로 각 절점의 변위를 계산한 결과가 Table 1이다. 유한요소법에 근거하여 작성된 Ross<sup>3)</sup>의 전산 프로그램으로 동일 모델에 대하여 계산한 결과가 Table 2이다. 양 방법에 의한 계산 결과는 아주 잘 일치하였다.

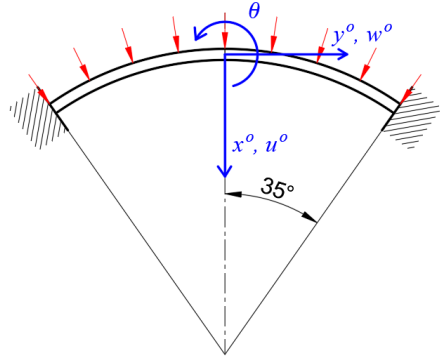


Fig. 4 Spherical shell cap

Table 1 Nodal displacements of dome by FE-TSCM

Node	$u_i^o$ (m)	$w_i^o$ (m)	$\theta_i$ (rad)
1	1.389e-05	0.000e+00	0.000e+00
2	1.387e-05	-6.133e-07	-1.403e-07
3	1.381e-05	-1.224e-06	2.495e-07
4	1.360e-05	-1.812e-06	1.619e-06
5	1.307e-05	-2.326e-06	4.410e-06
6	1.203e-05	-2.669e-06	8.858e-06
7	1.029e-05	-2.706e-06	1.470e-05
8	7.766e-06	-2.307e-06	2.066e-05
9	4.660e-06	-1.445e-06	2.390e-05
10	1.631e-06	-3.928e-07	1.942e-05
11	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00

Table 2 Nodal displacements of dome by FEM

Node	$u_i^o$ (m)	$w_i^o$ (m)	$\theta_i$ (rad)
1	1.389e-05	0.000e+00	0.000e+00
2	1.387e-05	-6.133e-07	-1.403e-07
3	1.381e-05	-1.224e-06	2.495e-07
4	1.360e-05	-1.812e-06	1.619e-06
5	1.307e-05	-2.326e-06	4.410e-06
6	1.203e-05	-2.669e-06	8.858e-06
7	1.029e-05	-2.706e-06	1.470e-05
8	7.766e-06	-2.307e-06	2.066e-05
9	4.660e-06	-1.445e-06	2.390e-05
10	1.631e-06	-3.928e-07	1.942e-05
11	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00

Table 3 Meridional stresses in dome (kPa)

Element	$\xi$	FE-TSCM		FEM	
		int	ext	int	ext
9	0	-85.90	-103.1	-85.90	-103.1
9	1	-147.0	-34.82	-147.0	-34.82
10	0	-142.6	-32.14	-142.6	-32.14
10	1	-254.6	82.17	-254.6	82.17

$\xi = 0$  is at origin end of element

$\xi = 1$  is at the other end of the element

Table 4 Hoop stresses in dome (kPa)

Element	$\xi$	FE-TSCM		FEM	
		int	ext	int	ext
9	0	-26.93	-60.28	-26.93	-60.28
9	1	-20.18	-23.73	-20.18	-23.73
10	0	-19.85	-22.87	-19.85	-22.87
10	1	-42.43	13.69	-42.43	13.69

$\xi = 0$  is at origin end of element

$\xi = 1$  is at the other end of the element

Table 3은 돔의 9번째와 10번째 요소 내외부의 자오선방향 응력을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과이고, Table 4는 원주방향 응력(hoop stress)을 계산한 결과이다. 양 방법의 결과가 아주 잘 일치하였다.

### 3.2 원통-원추형 결합 셀 형태의 물탱크

Fig. 5에 나타난 두 번째 계산모델은 내경 5 m, 높이 10 m의 원통형 셀과 높이 5 m의 원추형 셀이 결합된 구조물이고, 내부에는 10 m 높이의 물이 저장된 물탱크이다. 경계조건은 구조물의 하부가 고정이고, 셀의 두께는 1 cm, 탄성계수는 200 GPa, 푸아송비는 0.3이다.

저장된 물의 정수압을 하중으로 고려하고, 원통형 셀은 10개, 원추형 셀은 5개의 축대칭 원추요소로 모델링한다. 절점 1은 물탱크의 가장 하부에 해당되고, 절점 11은 원통형 셀과 원추형 셀의 결합부 그리고 절점 16은 가장 상부에 해당된다. 대칭성을 고려하여 절점 16의 변위  $w_{16}^o$ 와 각변위  $\theta_{16}$ 을 추가로 구속하여 계산하였다.

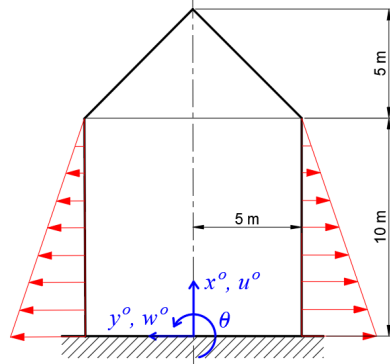


Fig. 5 Water tank

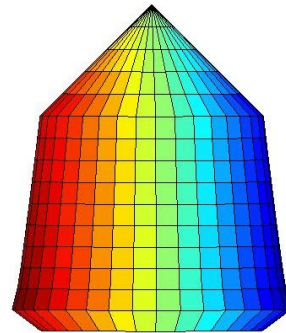


Fig. 6 Deformed shape of water tank

유한요소-전달강성계수법으로 흡수 절점의 변위를 계산한 결과를 Table 5에 나타내었다. 유한요소법에 근거하여 작성된 Ross<sup>3)</sup>의 전산 프로그램으로 동일 모델에 대하여 계산한 결과를 Table 6에 나타내었다. 양 방법의 계산 결과를 비교해보면 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다.

Table 5 Odd number nodal displacements of water tank by FE-TSCM

Node	$u_i^o$ (m)	$w_i^o$ (m)	$\theta_i$ (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
3	-1.086e-04	1.018e-03	-5.238e-04
5	-2.114e-04	7.365e-04	-1.620e-04
7	-2.849e-04	4.901e-04	-1.483e-04
9	-3.290e-04	2.452e-04	-1.457e-04
11	-3.437e-04	9.832e-06	-7.286e-05
13	-3.533e-04	2.397e-07	-2.497e-06
15	-3.535e-04	1.212e-08	-8.358e-08

Table 6 Odd number nodal displacements of water tank by FEM

Node	$u_i^o$ (m)	$w_i^o$ (m)	$\theta_i$ (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
3	-1.086e-04	1.018e-03	-5.238e-04
5	-2.114e-04	7.365e-04	-1.620e-04
7	-2.849e-04	4.901e-04	-1.483e-04
9	-3.290e-04	2.452e-04	-1.457e-04
11	-3.437e-04	9.833e-06	-7.287e-05
13	-3.533e-04	2.397e-07	-2.497e-06
15	-3.535e-04	1.217e-08	-8.344e-08

Fig. 6은 계산 결과인 각 절점의 변위와 구조물의 대칭성을 이용하여 3차원 형태로 나타낸 물탱크의 변형된 형상이다. 변형 결과를 확연히 보여주기 위해 각 절점의 변위를 1,000배 확대하였고, 색상과 격자는 3차원 형상을 명확히 표현하기 위해 제공된 것 외에는 특별한 의미가 없다.

### 3.3 내압을 받는 압력 용기

Fig. 7에 나타낸 세 번째 계산모델은 좌우에 2개의 반구형 셸과 2개의 원통형 셸 그리고 하나의 원추형 셸이 결합된 구조물로서 내부에서 일정한 압력을 받는 압력용기이다. 이 계산모델의 전체 길이는 5.6 m, 두께는 1 cm, 탄성계수는 210 GPa, 푸아송비는 0.3이다. 경계조건은 좌단이 고정이고, 내부 게이지 압력은 1 MPa이다.

좌측부터 반구형 셸은 10개, 첫 번째 원통형 셸은 20개, 원추형 셸은 10개, 두 번째 원통형 셸은 10개, 마지막 반구형 셸은 6개, 따라서 총 56개의 축대칭 원추요소로 모델링한다. 절점 1은 압력용기의 좌단에 해당되고, 절점 57은 우단에 해당된다. 대칭성을 고려하여 절점 57의 변위  $w_{57}^o$ 와 각 변위  $\theta_{57}$ 을 추가로 구속하여 계산하였다.

유한요소-전달강성계수법으로 주요 절점의 변위를 계산한 결과를 Table 7에 나타내었다. 유한요소법에 근거하여 작성된 Ross<sup>3)</sup>의 전산 프로그램으로 동일 모델에 대하여 계산한 결과를 Table 8에 나타내었다. 양 방법의 계산 결과를 비교해보면 아주 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

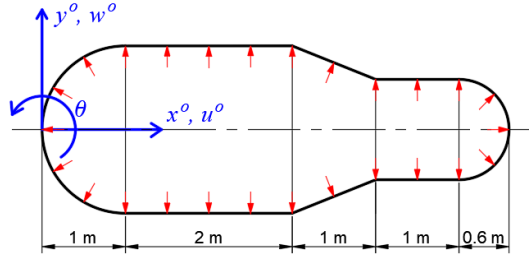


Fig. 7 Pressure vessel with internal pressure

Table 7 Nodal displacements of pressure vessel by FE-TSCM

Node	$u_i^o$ (m)	$w_i^o$ (m)	$\theta_i$ (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
11	1.903e-04	2.824e-04	5.404e-04
21	2.879e-04	4.048e-04	-5.913e-09
31	3.969e-04	-1.702e-04	1.221e-04
41	6.960e-04	3.159e-04	-2.075e-04
51	7.494e-04	9.994e-05	1.131e-05
57	8.268e-04	0.000e+00	0.000e+00

Table 8 Nodal displacements of pressure vessel by FEM

Node	$u_i^o$ (m)	$w_i^o$ (m)	$\theta_i$ (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
11	1.903e-04	2.824e-04	5.404e-04
21	2.879e-04	4.048e-04	-5.913e-09
31	3.969e-04	-1.702e-04	1.221e-04
41	6.960e-04	3.159e-04	-2.075e-04
51	7.494e-04	9.994e-05	1.131e-05
57	8.268e-04	0.000e+00	0.000e+00

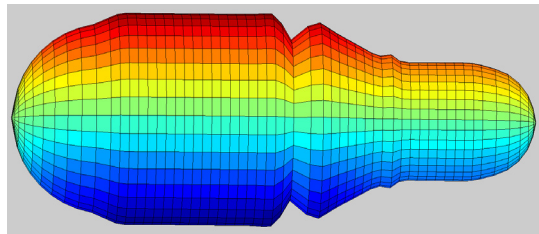


Fig. 8 Deformed shape of pressure vessel

Fig. 8은 계산 결과로부터 나타낸 압력용기의 변형된 형상이다. 변형 결과를 확연히 보여 주기 위해 각 절점의 변위를 500배 확대하였고, 색상과 격자는 3차원 형상을 명확히 표현하기 위해 제공된 것 외에는 특별한 의미가 없다.

## 5. 결 론

축대칭 셸의 정적해석은 공학분야에서 중요한 주제 중의 하나이다. 이 논문에서 저자들은 유한요소법의 모델링 기법과 전달강성계수법의 전달기법을 조합한 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석을 수행하기 위한 전산 알고리즘을 제안한다.

이 연구에서는 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석을 수행하기 위한 전산알고리즘을 정식화한 후, 유한요소-전달강성계수법의 계산 정확성을 확인하기 위하여 3개의 계산모델(균일한 압력을 받는 원형 돔, 정수압을 받는 물탱크, 내부 압력을 받는 압력용기)에 대해 정적해석을 수행하였다. 그리고 동일한 모델에 대하여 유한요소법으로 해석을 수행한 후, 양 방법의 계산 결과를 비교한 결과 이 연구에서 제안한 유한요소-전달강성계수법이 다양한 형상을 갖는 축대칭 셸의 정적해석에 신뢰성 있는 해석 기법임을 확인할 수 있었다.

## Author contributions

M. S. Choi; Conceptualization, Investigation, Methodology, Software and Writing-original draft.  
K. U. Yang; Project administration, Validation, Visualization, Writing-review & editing and Supervision.

## References

1. H. Kraus, 1967, "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, New York.
2. J. N. Reddy, 2007, "Theory and Analysis of

Elastic Plates and Shells (Second Edition)", CRC Press, Boca Raton, 403-478.

3. C. T. F. Ross, 1982, "Computational Methods in Structural and Continuum Mechanics", John Wiley & Sons, New York, 79-89.
4. W. Jr. Weaver and P. R. Hohnston, 1984, "Finite elements for Structural Analysis", Prentice-Hall, New Jersey.
5. H. S. Ryu and H. C. Sin, 1997, "Two Node Meridional Strain-based Axisymmetric Shell Elements", Transactions of the KSME A, 21(6), 925-932.  
(<https://doi.org/10.22634/KSME-A.1997.21.6.925>)
6. Y. W. Kwon and H. C. Bang, 2000, "The Finite element method using MATLAB (2nd Edition)", CRC Press, Boca Raton.
7. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2012, "Stress Analysis of Axisymmetric Cylindrical Shell", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, 16(6), 45-51.  
(<https://doi.org/10.9726/kspse.2012.16.6.045>)
8. M. S. Choi, J. H. Byun and D. J. Yeo, 2015, "Structural Analysis of Axisymmetric Conical Shells Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, 19(1), 38-44.  
(<http://dx.doi.org/10.9726/kspse.2015.19.1.038>)

## 부 록

축대칭 셸의 해석에 사용되는 절두 원추요소의 강성행렬과 압력의 등가절점하중을 구하는 방법은 여러 가지가 있지만 이 연구에서 채택한 Ross<sup>3)</sup>가 사용한 방법은 다음에 기초한다.

$i$ 번째 절두 원추요소 내부의 임의의 위치  $\xi = x^i/l_i$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ )에서 자오선방향 및 법선방향의 변위  $u^i$ ,  $w^i$ 를 형상함수행렬과 절점변위벡터를 이용하여 다음과 같이 가정한다.



$$\begin{bmatrix} u^i \\ w^i \end{bmatrix} = \mathbf{N}_1 \mathbf{d}_i^i + \mathbf{N}_2 \mathbf{d}_{i+1}^i$$

여기서

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & l(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix}$$

Novozhilov의 식으로 변형률벡터를 다음 식과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x^i \\ \mathcal{E}_\phi^i \\ \chi_x^i \\ \chi_\phi^i \end{bmatrix} = \mathbf{E}_1 \mathbf{d}_i^i + \mathbf{E}_2 \mathbf{d}_{i+1}^i$$

여기서

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -1/l_i & 0 & 0 \\ (1-\xi)s/r & (1-3\xi^2+2\xi^3)c/r & l(\xi-2\xi^2+\xi^3)c/r \\ 0 & (6-12\xi)l_i^2 & (4-6\xi)/l_i \\ 0 & 6(\xi-\xi^2)s/(rl_i) & (-1+4\xi-3\xi^2)s/r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1/l_i & 0 & 0 \\ \xi s/r & (3\xi^2-2\xi^3)c/r & l_i(\xi-2\xi^2+\xi^3)c/r \\ 0 & (-6+12\xi)l_i^2 & (4-6\xi)/l_i \\ 0 & 6(-\xi+\xi^2)s/(rl_i) & (2\xi-3\xi^2)s/r \end{bmatrix},$$

$$s = \sin \alpha_i, \quad c = \cos \alpha_i$$

탄성이론으로부터 합응력(stress resultant)을 표시하면 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} N_x^i \\ N_\phi^i \\ M_x^i \\ M_\phi^i \end{bmatrix} = \mathbf{J}_i \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x^i \\ \mathcal{E}_\phi^i \\ \chi_x^i \\ \chi_\phi^i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_i = \frac{E_i t_i}{(1-\nu_i^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_i^2/12 & \nu_i t_i^2/12 \\ 0 & 0 & \nu_i t_i^2/12 & t_i^2/12 \end{bmatrix}$$

여기서  $E$ 와  $\nu$ 는 탄성계수와 푸아송비이다.