



유한요소-전달강성계수법을 이용한 2차원 곡선 보의 정상상태 응답해석

Steady State Response Analysis of Two Dimensional Curbed Beam Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method

최명수* · 여동준*†
 Myung-Soo Choi* and Dong-Jun Yeo*†

(Received 15 October 2018, Revision received 28 December 2018, Accepted 09 January 2019)

Abstract: It is very important to analyze the steady state responses of curbed beams given periodic external forces. We have used the modal analysis method (MAM) and the direct analysis method (DAM) for analyzing the steady state response of curbed beam. The concept of the DAM is much easier than that of the MAM. However, the DAM requires more computational time in analyzing curbed beams with a lot of degree-of-freedom. The authors developed the finite element-transfer stiffness coefficient method (FE-TSCM), which is the combination of the modeling technique of the finite element method and the transfer technique of the transfer stiffness coefficient method. In this paper, the authors formulate the FE-TSCM to analyze the steady state responses of the curbed beams with a lot of degree-of-freedom. After selecting five computational models for curbed beams, the authors calculate the steady state responses of them by using the FE-TSCM and the DAM. The authors confirm that the FE-TSCM is a very speedy and accurate method.

Key Words : Steady State Response, Curbed Beam, Direct Analysis Method, Finite Element Method, Transfer Stiffness Coefficient Method

1. 서 론

곡선 보에 대한 정적·동적 해석은 지금까지 많은 연구자들에 의해 다양한 연구¹⁻³⁾가 수행되어 오고 있다. 저자들도 선행 연구에서 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 곡선 보의 자유진동 해

석 및 정적 해석을 수행한 바 있고 그 유효성을 논문을 통해 발표^{4,5)}하였다.

기계나 구조물의 설계 시에는 정적 해석 및 자유진동 해석도 중요하나 정상상태 응답을 정확히 파악하는 일도 무척 중요하다. 정상상태 응답을 해석하기 위해 가장 많이 사용되는 방법은 모드

*† 여동준(ORCID:<http://orcid.org/0000-00024806-2724>) 교수, 전남대학교 해양기술학부

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*최명수 : 교수, 전남대학교 해양기술학부

*† Dong-Jun Yeo(ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-4806-2724>) : Professor, Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*Myung-Soo Choi : Professor, Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

해석법과 직접해석법이 있다. 직접해석법은 모드 해석법에 비해 개념이 단순하고 모델링하기도 상대적으로 쉬워 전산 프로그램을 만들기에 유리하지만 시스템의 전체 자유도가 커질 경우 많은 계산 시간을 요구하는 취약점이 있다.

직접해석법으로 곡선 보의 정상상태 응답을 정도 높게 해석하기 위해서는 곡선 보의 기하학적 특징으로 인하여 많은 요소로 분할할 필요가 있고, 이는 폭발적인 계산 시간의 증가로 이어진다.

따라서 저자들은 이러한 점에 착안하여 기존의 직접해석법의 계산 정도를 그대로 유지하면서 계산 시간을 크게 줄일 수 있는 방법으로 유한요소-전달강성계수법을 제안한 바 있다.

이 연구에서는 곡선 보의 정상상태 응답해석을 효율적으로 수행할 수 있는 방법으로 유한요소-전달강성계수법을 제시하고, 수치 계산 결과를 통해 제안된 방법의 유효성을 확인한다.

2. 정상상태 응답해석 알고리즘

유한요소-전달강성계수법⁶⁾을 이용하여 Fig. 1과 같은 일반적인 2차원 곡선 보를 대상으로 정상상태 응답을 구하는 알고리즘을 기술한다.

2.1 곡선 보의 모델링

곡선 보의 질량, 강성, 그리고 내부 감쇠를 가지며, Fig. 1에 나타난 것처럼 다수의 기초지지 스프링(\hat{K})과 점성 감쇠기(\hat{C})로 기초로부터 지지된다. Fig. 1에서 R는 곡선 보의 반경, α 는 열림각, 그리고 \hat{q} 는 조화 외력이다.

곡선 보의 다수의 곡선 보 요소로 분할되고, 곡선 보의 좌단과 우단 그리고 각 요소의 결합점을 절점이라 부르며, 좌단에서 우단으로 순차적으로 절점 1, 절점 2, ..., 절점 n이라 한다. 기초지지 스프링과 점성 감쇠기 그리고 조화 외력은 이 절점 중의 하나에 주어지도록 모델링하며, 곡선 보에서 정상상태 응답을 구하고자 하는 위치도 반드시 절점이 되도록 모델링한다.

2차원 곡선 보의 해석에서 모든 절점은 각각 3 자유도를 가진다. 3자유도는 곡선 보의 접선 방향

과 반경 방향의 변위, 회전방향의 각변위에 해당한다.

2.2 강성계수 및 힘보정벡터의 전달

좌단에 해당하는 절점 1의 강성계수행렬(S_1) 및 힘 보정 벡터(e_1)는 식 (1)과 같다.

$$S_1 = \hat{K}_1 + j\Omega \hat{C}_1, \quad e_1 = -\hat{q}_1 \quad (1)$$

여기서 j 는 허수이고, Ω 는 조화 외력의 각진동수이고, \hat{q}_1 는 절점 1에 작용하는 조화 외력의 진폭이다. 그리고 \hat{K}_1 은 식(2)와 같이 기초와 절점 1을 연결하는 3방향(접선, 반경, 회전 방향)의 기초 지지 스프링의 스프링상수(k_t, k_r, k_θ)로 구성된 대각행렬이고, \hat{C}_1 은 기초와 절점 1을 연결하는 3방향의 점성 감쇠기의 감쇠계수(c_t, c_r, c_θ)로 구성된 대각행렬이며, 구조감쇠는 고려하지 않는다.

$$\begin{aligned} \hat{K}_1 &= \text{diag}(k_t, k_r, k_\theta)_1, \\ \hat{C}_1 &= \text{diag}(c_t, c_r, c_\theta)_1 \end{aligned} \quad (2)$$

유한요소해석으로부터 절점 1과 절점 2 사이에 있는 첫 번째 곡선 보 요소에 대한 요소 질량행렬 ($M_1^{(e)}$)과 요소 강성행렬($K_1^{(e)}$)을 각각 구한다.⁴⁾ 요소 감쇠행렬은 식 (3)으로부터 유도한다.

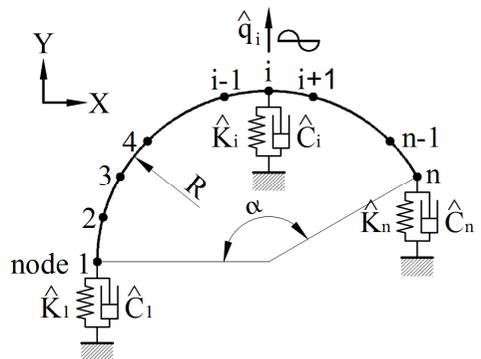


Fig. 1 Analytical model

$$\mathbf{C}_1^{(e)} = a\mathbf{M}_1^{(e)} + b\mathbf{K}_1^{(e)} \quad (3)$$

여기서 a 와 b 는 곡선 보요소의 감쇠를 질량 및 강성 비례로 구하는 인자이다.

곡선 보요소의 질량, 강성, 감쇠행렬을 요소 동강성행렬($\mathbf{D}_1^{(e)}$)로 정리하면 식 (4)와 같고,

$$\mathbf{D}_1^{(e)} = \mathbf{K}_1^{(e)} + j\Omega\mathbf{C}_1^{(e)} - \Omega^2\mathbf{M}_1^{(e)} \quad (4)$$

이 행렬을 부분 동강성행렬($\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1$)로 분해하면,

$$\mathbf{D}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이 된다.

Fig. 1의 두 번째 절점인 절점 2의 강성 계수행렬 및 힘보정벡터는

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{D}_1 + \mathbf{C}_1\mathbf{V}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{h}_1 \quad (6)$$

여기서

$$\mathbf{V}_1 = -(\mathbf{S}_1 + \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{h}_1 = -(\mathbf{S}_1 + \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{e}_1 \quad (7)$$

Fig. 1에 나타난 절점 3 및 절점 4의 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 구하는 방법은 상기 식과 침자만 다를 뿐 완전히 동일하므로 아래의 일반식을 이용하면 곡선 보 요소에 대한 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달이 가능해진다.

$$\mathbf{S}_{i+1} = \mathbf{D}_i + \mathbf{C}_i\mathbf{V}_i, \quad \mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{C}_i\mathbf{h}_i \quad (8)$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = -(\mathbf{S}_i + \mathbf{A}_i)^{-1}\mathbf{B}_i, \quad \mathbf{h}_i = -(\mathbf{S}_i + \mathbf{A}_i)^{-1}\mathbf{e}_i. \quad (9)$$

임의의 절점 i 에 기초지지 스프링이나 점성 감

쇠기 또는 조화 외력이 작용할 경우에는 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{S}_i = \bar{\mathbf{S}}_i + (\hat{\mathbf{K}}_i + j\Omega\hat{\mathbf{C}}_i), \quad \mathbf{e}_i = \bar{\mathbf{e}}_i - \hat{\mathbf{q}}_i \quad (10)$$

여기서 $\bar{\mathbf{S}}_i$ 및 $\bar{\mathbf{e}}_i$ 는 절점 i 좌측의 강성계수행렬 및 힘보정벡터이고, $\hat{\mathbf{K}}_i$ 와 $\hat{\mathbf{C}}_i$ 는 식 (2)와 유사하게 기초와 절점 i 를 연결하는 3방향(접선, 반경, 회전 방향)의 기초지지 스프링의 스프링상수와 점성 감쇠기의 감쇠계수로 구성된 대각행렬이다.

전달식인 식 (8)과 식 (10)을 순차적으로 적용하면 최종적으로는 절점 n 의 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 구할 수 있다.

2.3 변위벡터의 계산

절점 n 의 정상상태 응답인 변위벡터의 진폭(\mathbf{d}_n)은

$$\mathbf{d}_n = -(\mathbf{S}_n)^{-1}\mathbf{e}_n \quad (11)$$

으로 구할 수 있다. 그리고 절점 n 을 제외한 나머지 절점의 변위벡터의 진폭(\mathbf{d}_i)은

$$\mathbf{d}_{i-1} = \mathbf{V}_{i-1}\mathbf{d}_i + \mathbf{h}_{i-1} \quad (i = n, n-1, \dots, 2) \quad (12)$$

으로 구한다.

식 (11) 및 식 (12)에서 구한 변위벡터의 진폭은 모두 요소 좌표계로 나타난 것이므로 좌표변환행렬을 이용하여 전체 좌표계로 나타낼 수 있다.

3. 수치 계산 결과 및 검토

이 연구에서 저자들은 유한요소-전달강성계수법으로 2차원 곡선 보의 정상상태 응답을 해석하는 전산 프로그램을 개발하였다. 그리고 해석 결과의 신뢰성을 확인하기 위하여 신뢰성이 입증된 기존의 직접해석법으로 동일한 해석이 가능한 전산 프로그램을 추가로 만들었다.

계산 모델은 1/4 원호 곡선 보와 반원 곡선보인데 이러한 모델을 채택하게 된 주된 이유는 이들 모델은 선행 연구⁴⁾를 통해 이미 자유진동 해석을 수행한 바 있으므로 그 결과인 고유진동수와 고유모드를 이 연구의 결과인 정상상태 응답과 비교하기 위해서이다.

3.1 한단 고정인 4분원 곡선 보

Fig. 2에 나타난 첫 번째 계산 모델은 반경이 1 m이고, 열림각이 90도, 경계조건은 양지지단이 고정-자유인 4분원 곡선 보이다. 곡선 보의 단면은 직사각형으로 폭이 2 cm, 높이가 1 cm이고, 탄성계수는 200 GPa, 밀도는 7800 kg/m³이다. 전체 곡선 보는 400개의 곡선 보요소로 모델링한다.

Y축 방향으로 진폭이 1 N인 조화 외력이 곡선 보의 자유단에 작용할 때, 가진점인 자유단의 정상상태 응답을 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법으로 계산하였다. 그 결과 양 방법의 결과는 일치하였다. Fig. 3에는 조화 외력의 주파수가 0에서 200 Hz일 때, 자유단에서 Y축 방향의 변위의 진폭을 나타낸 것이다.

참고 문헌 4에 따르면 동일 모델에 대한 고유진동수는 4 Hz, 17 Hz, 53 Hz, 109 Hz, 183 Hz이었다. 이 고유진동수들이 Fig. 3에서 피크(peak)로 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 따라서 직접해석법 및 자유진동 해석과의 비교를 통해 이 연구에서 제시된 방법인 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

Fig. 4에 나타난 두 번째 계산 모델은 첫 번째 계산 모델의 자유단에 Y축 방향의 점성 감쇠기가 추가된 계산 모델이다.

점성 감쇠기의 감쇠계수가 0, 20, 50, 100 Ns/m이고, Y축 방향으로 진폭이 1 N인 조화 외력이 계산 모델 II의 자유단에 작용할 때, 가진점인 자유단의 정상상태 응답을 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법으로 계산하였다. 그 결과는 계산 모델 I과 동일하게 양 방법의 결과가 일치하였다. Fig. 5에는 조화 외력의 주파수가 0에서 200 Hz이고, 점성 감쇠기의 감쇠계수(0, 20, 50, 100 Ns/m) 별로 자유단에서 Y축 방향 변위의 진폭을 나타낸 것이

다. 감쇠계수의 증가에 따라 공진점에서 정상상태 응답의 진폭이 감소함을 확인할 수 있었다.

3.2 양단 고정인 반원 곡선 보

Fig. 6에 나타난 세 번째 계산 모델은 반경이 0.4 m이고, 열림각이 180도, 경계조건은 양단 고정인 반원 곡선 보이다. 곡선 보의 단면은 중공형으로 바깥지름 1 cm, 안지름 0.8 cm이고, 탄성계수는 200 GPa, 밀도는 7850 kg/m³이다. 곡선 보는 400개

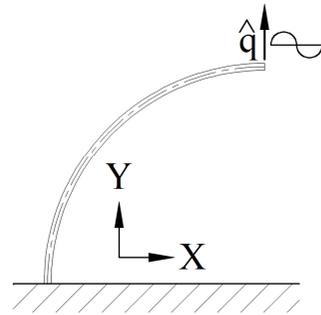


Fig. 2 Computational model I

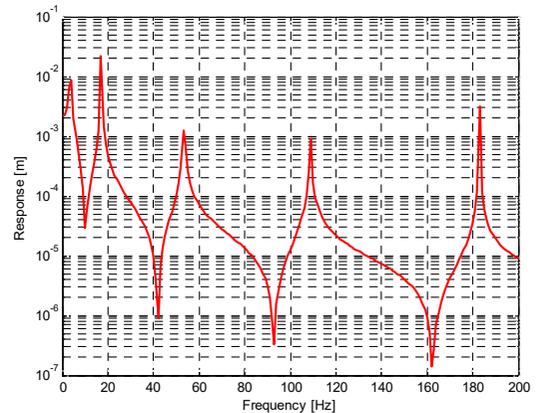


Fig. 3 Steady state response of computational model I

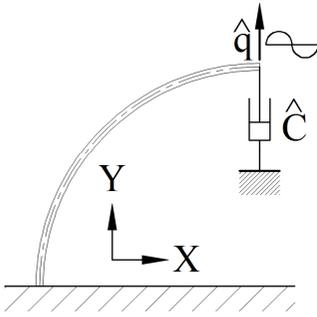


Fig. 4 Computational model II

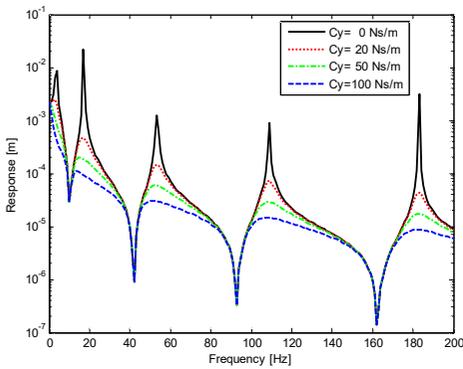


Fig. 5 Steady state responses of computational model II

의 곡선 보요소로 모델링한다.

X축 방향으로 진폭이 1 N인 조화 외력이 곡선 보의 한 가운데 절점에 작용할 때, 가진점의 정상상태 응답을 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법으로 계산하였고, 그 결과를 비교해보니 양 방법의 결과가 일치하였다. Fig. 7에는 조화 외력의 주파수가 0에서 300 Hz일 때, 한 가운데 절점의 X축 방향 변위의 진폭을 나타낸 것이다.

참고 문헌 4에 따르면 동일 모델에 대한 고유진동수는 71 Hz, 155 Hz, 288 Hz이었다. 이 고유진동수 중에서 2차 고유진동수가 Fig. 7에서 피크로 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 1차 및 3차 고유진동수 부근에서 정상상태 응답이 공진되지 않은 이유는 1차 및 3차 고윳모드를 살펴보면 곡선 보의 중앙 절점이 X축 방향으로 진동을 하지 않는 절이 되기 때문이다(참고문헌 4의 Fig. 3 및

Fig. 5 참조).

Fig. 8에 나타난 네 번째 계산 모델은 세 번째 계산 모델의 한 가운데 절점에 X축 방향의 점성 감쇠기가 추가된 계산 모델이다.

점성 감쇠기의 감쇠계수가 0, 10, 20, 50 Ns/m이고, X축 방향으로 진폭이 1 N인 조화 외력이 계산 모델 4의 한 가운데에 작용할 때, 가진점인 한 가운데 절점의 정상상태 응답을 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법으로 계산하였고, 그 결과 역시 양 방법의 결과는 일치하였다. Fig. 9에는 조화 외력의 주파수가 0에서 300 Hz이고, 점성 감쇠기의 감쇠계수 별로 한 가운데 절점의 X축 방향 변위의 진폭을 나타낸 것이다. 감쇠계수의 증가에 따라 공진점의 진폭이 감소함을 확인할 수 있었다.

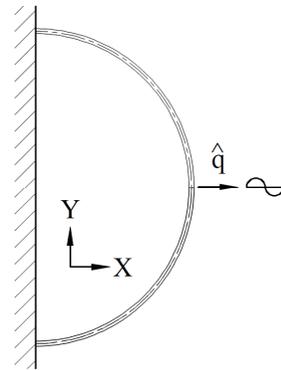


Fig. 6 Computational model III

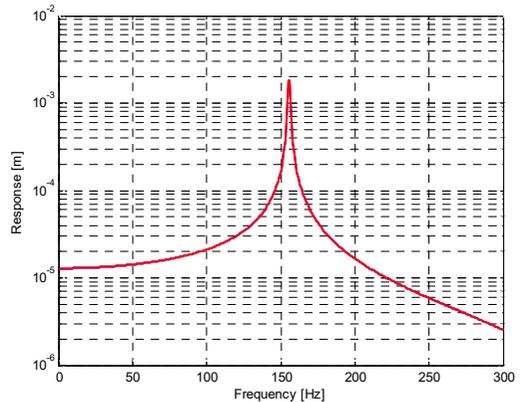


Fig. 7 Steady state response of computational model III

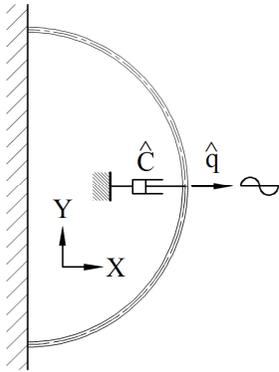


Fig. 8 Computational model IV

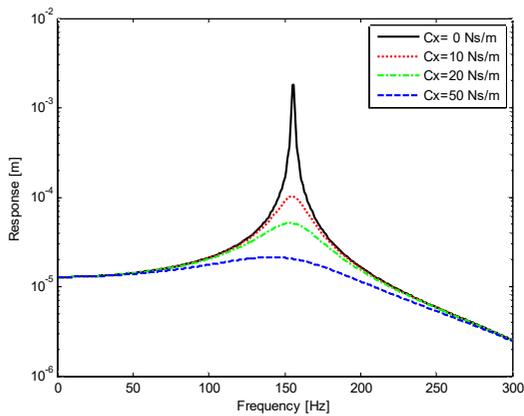


Fig. 9 Steady state responses of computational model IV

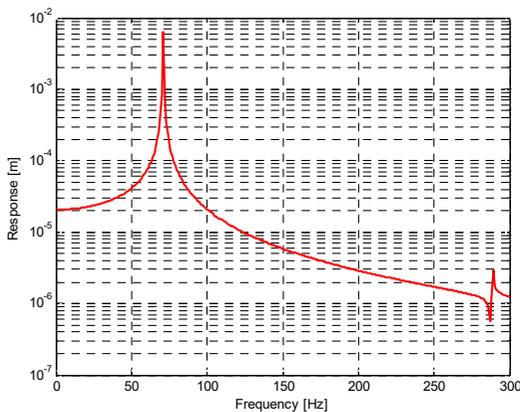


Fig. 10 Steady state response of computational model V

다섯 번째 계산 모델은 세 번째 계산 모델에서 조화 외력의 방향이 X축에서 Y축으로 변경된 모델이다.

1차 및 3차 고유진동수(71 Hz, 288 Hz)가 Fig. 10에서 피크로 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 2차 고유진동수(155 Hz) 부근에서 정상상태 응답이 공진되지 않은 이유는 2차 고유모드를 살펴보면 곡선 보의 중앙 절점이 Y축 방향으로 진동을 하지 않는 절이 되기 때문이다(참고 문헌 4의 Fig. 4 참조).

Fig. 7과 Fig. 10을 통해 자유진동 해석 결과와의 비교를 통해 유한요소-전달강성계수법의 정상상태 응답 결과가 신뢰성이 있음을 재차 확인할 수 있었다.

3.3 계산 시간

유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)과 직접해석법(DAM)으로 상기 계산 모델 I과 III의 정상상태 응답을 계산하는데 소요된 시간을 조사하였고, 그 결과를 Table 1에 나타내었다.

양 방법의 계산 시간을 비교해 보면, 유한요소-전달강성계수법이 직접해석법 보다 계산 시간이 훨씬 짧았다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 계산속도 면에서는 직접해석법 보다 매우 우수함을 확인할 수 있었다.

Table 1 Computational times (unit : [s])

Model	FE-TSCM	DAM
Computational model I	2.358	17.981
Computational model III	3.529	26.499

4. 결론

이 논문에서 저자들은 조화 외력을 받는 곡선 보의 정상상태 응답을 해석하는 방법으로 유한요소-전달강성계수법을 제안한다. 핵심적인 알고리즘을 간단히 기술한 후, 곡선 보에 상당하는 5가지 계산 모델을 대상으로 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법으로 정상상태 응답을 계산한 후 그 결과를 고찰하였다.

양 방법의 계산 정도는 동일하였고, 계산 시간을 비교해 보면, 유한요소-전달강성계수법이 직접 해석법보다 훨씬 빨랐다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 직접해석법과 동일한 정도의 계산 결과를 구하면서도 계산속도 면에서는 직접해석법보다 우수함을 확인할 수 있었다.

References

1. K. H. Murray, 1970, "Comments on the Convergence of Finite Element Solutions", AIAA Journal, Vol. 8, No. 4, pp. 815-816.
2. K. Nagaya and Y. Hirono, 1977, "In-Plane Vibration of Viscoelastic Circular Rod with Consideration of Shearing Deformation and Rotary Inertia", Bulletin of the JSME, Vol. 20, No. 143, pp. 539-547.
3. G. H. Zhang, Z. S. Liu and H. H. Yoo, 2008, "In-Plane Vibration Analysis of Cantilevered Circular Arc Beams Undergoing Rotational Motion", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 22, pp. 113-119.
4. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2017, "Free Vibration Analysis of Curved Beams Regarded as Discrete System Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 21, No. 1, pp. 37-42.
5. M. S. Choi, 2017, "Static Analysis of Two Dimensional Curbed Beam Structure by Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 21, No. 6, pp. 40-45.
6. M. S. Choi, D. J. Yeo, J. H. Byun, J. J. Seo and J. K. Yang, 2007, "In-Plane Vibration Analysis of General Plates", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 11, No. 4, pp. 78-85.